

Вестник Череповецкого государственного университета. 2022. № 5 (110). С. 7–19.
Cherepovets State University Bulletin, 2022, no. 5 (110), pp. 7–19.

Научная статья
УДК 004.942
<https://doi.org/10.23859/1994-0637-2022-5-110-1>

Оптимальное управление производственной системой на основе вероятностного критерия

Гульнара Фазульяновна Ахмедьянова^{1✉}, Александр Михайлович Пищухин²

^{1,2}Оренбургский государственный университет,
Оренбург, Россия

¹ahmedyanova@bk.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-3284-7794>

²pishchukhin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4655-6824>

Аннотация. В статье рассматривается вероятностное описание процесса следования предприятия за рыночным спросом. Как рынок, так и поведение предприятия описывается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова. В работе ставится и решается задача оптимального управления производственной системой. В качестве критерия рассматривается разность плотностей вероятности возникновения спроса на продукцию предприятия на рынке и вероятности выпустить продукцию для удовлетворения этого спроса. Используется координатно-параметрический подход к управлению. Для нахождения приближенных решений применяется метод малого параметра.

Ключевые слова: координатно-параметрическое управление, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, задача оптимального управления, вероятностный критерий, метод Эйлера-Лагранжа, метод малого параметра

Для цитирования: Ахмедьянова Г. Ф., Пищухин А. М. Оптимальное управление производственной системой на основе вероятностного критерия // Вестник Череповецкого государственного университета. 2022. № 5 (110). С. 7–19. <https://doi.org/10.23859/1994-0637-2022-5-110-1>.

Optimal control of the production system based on a probabilistic criterion

Gulnara F. Akhmedyanova^{1✉}, Aleksandr M. Pishchukhin²

^{1,2}Orenburg State University,
Orenburg, Russia,

¹ahmedyanova@bk.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-3284-7794>

²pishchukhin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4655-6824>

Abstract. The article focuses on the probabilistic description of the company following the market demand. Both the market and the behavior of the enterprise are described applying the Fokker-Plank-Kolmogorov equation. The paper raises and solves the problem of optimal enterprise management.

© Ахмедьянова Г. Ф., Пищухин А. М., 2022

As a criterion, the authors consider the difference between the probability densities of the enterprise product demand in the market and the probability of releasing products to meet this demand. A coordinate-parametric approach to management is used. To find approximate solutions, the small parameter method is applied.

Keywords: coordinate-parametric control, Fokker-Plank-Kolmogorov equation, optimal control problem, probabilistic criterion, Euler-Lagrange method, small parameter method

For citation: Akhmedyanova G. F., Pishchukhin A. M. Optimal control of the production system based on a probabilistic criterion. *Cherepovets State University Bulletin*, 2022, no. 5 (110), pp. 7–19. (In Russ.). <https://doi.org/10.23859/1994-0637-2022-5-110-1>.

Введение

Математическое описание функционирования производственного предприятия является очень сложной проблемой. Это, в первую очередь, обусловлено вхождением в ее состав персонала, в силу трудности предсказания его реакции. При одинаковых обстоятельствах получается совершенно различная реакция в зависимости от состояния человека.

Добавление технологического оборудования, несмотря на его большую детерминированность, лишь осложняет ситуацию, поскольку требует универсальности математического аппарата, как для описания действий персонала, так и для описания функционирования технологического оборудования.

Сюда добавляется абстрактный характер и прогностичность (потенциальность) многих производственных показателей, по которым оценивают результаты его функционирования. Речь идет о таких показателях, как: потенциал производства, его готовность к активности в нужный момент, качество производимых результатов и др. Все эти показатели должны оцениваться в данный момент времени, а проявят они себя лишь в будущем.

Объединяющим все эти требования математическим аппаратом может быть аппарат теории вероятностей (возможностей). Вероятность хорошо описывает и человеческое поведение, и функционирование технологического оборудования, а также позволяет описать будущее поведение производственной системы и результаты ее функционирования.

С другой стороны, сразу встает вопрос: как управлять вероятностью? Из-за невозможности прямого воздействия на нее необходимо обратиться к косвенному управлению. Продвигаться к управленческой цели можно в этом случае, создавая благоприятные условия для появления желаемого события и устраняя причины его не появления.

К достоинствам вероятностного описания можно отнести возможность применения уравнений Колмогорова. При этом нельзя забывать о марковской природе этих уравнений (отсутствие памяти и последствий, протекающих случайных процессов). Это означает, что уравнением Колмогорова описывается лишь первое приближение, как, например, линейный участок в небольшом диапазоне может описывать любую нелинейную функцию.

Основная часть

Координатно-параметрическое управление

Рассмотрим для простоты двухуровневую организационно-техническую систему. Например, предприятие можно рассматривать как интегрированную систему из четырех составляющих на первом уровне: персонал, здания; сооружения и инженерные коммуникации; технологическое оборудование и финансовые и материальные запасы. Тогда второй уровень – управление предприятием.

Пусть вероятность востребованности результата функционирования такой производственной системы¹ в обществе или на рынке (например, в виде экспериментального результата работы научной установки или произведенной предприятием продукции) имеет марковскую природу и зависит от времени t , а также от некоторой переменной x , характеризующей степень этой востребованности (например, количество покупателей продукции).

Применим к плотности, описанной выше вероятности ω_0^* , уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова²:

$$\frac{\partial \omega_0^*}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x} + \frac{b_0}{2} \frac{\partial^2 \omega_0^*}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где a_0 – коэффициент сноса, b_0 – коэффициент диффузии.

Поскольку уравнение (1) является параболическим, то оно подстановкой

$$\omega_0^* = e^{\mu x + \lambda t} \cdot \omega_1^*(x, t), \mu = a_0/b_0, \lambda = -a_0^2/2b_0 \quad (2)$$

может быть приведено к каноническому виду

$$\frac{\partial \omega_1^*}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \omega_1^*}{\partial x^2}. \quad (3)$$

С другой стороны, готовность самой организационно-технической системы к функционированию и производству востребованного результата также является случайным процессом, хотя в определенной степени и управляемым. Принимая опять гипотезу марковости этого процесса и учитывая, что это другой процесс и поэтому коэффициенты переноса a и диффузии b также будут другими, получаем другое уравнение Колмогорова. В итоге поведение плотности вероятности готовности системы ω описывается уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (4)$$

¹ Pishchukhin A. M., Akhmedyanova G. F. Optimal organization of multi-profile production // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1333, № 7. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1333/7/072020/pdf> (дата обращения: 06.06.2022).

² Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, 1977. Москва: Наука. 736 с.

В многоуровневой системе управления, на наш взгляд, удобнее всего применять концепцию координатно-параметрического управления, при котором координатное управление ассоциируется с уровнем, а изменение параметров по требованию верхнего уровня – с параметрическим. Сам термин «координатно-параметрическое управление» предложен Б. Н. Петровым, В. Ю. Рутковским и С. Д. Земляковым¹. При координатно-параметрическом управлении подразумевается, по выражению академика Б. Н. Петрова², встречное движение объекта управления к регулятору.

Техническим примером может служить самолет с изменяемым параметром стреловидности крыла. Координатное управление связано с управлением курсом самолета. Если же для достижения цели верхнего уровня нужна маневренность, то крылья раскладываются, а если большая скорость – самолет складывает крылья (параметрическое управление), приближаясь к ракете.

Возвращаясь к вероятностному описанию, требуем, чтобы в отличие от первого (рыночного) процесса второй производственный был управляемым необходимо ввести разграничение: пусть к координатному управлению относятся все факторы, напрямую влияющие на плотность вероятности, тогда факторы, влияющие на параметры, естественно отнести к параметрическому управлению³. Возвращаясь к уравнению (4) понимаем, что им описывается уровневое координатное управление (верхнего уровня). На нижнем уровне, уровне составляющих организационно-технической системы, находятся параметры, изменяя которые можно сделать коэффициент уравнения в нем близким к соответствующему коэффициенту уравнения (3).

Исследуем параметрическое управляющее воздействие u такое, что коэффициент $b_2 \rightarrow b_1$. Введем управление в уравнении (4) в следующем виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = by \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Здесь управляющее воздействие носит косвенный характер и управленческие мероприятия должны быть такими, чтобы уравнивать коэффициенты при вторых производных в уравнениях (3) и (4). Кроме того, здесь учтено, что координатное управление является аддитивным, а параметрическое – мультипликативным.

Задача оптимального управления предприятием в этом представлении должна сводиться к обеспечению такого уровня готовности к выпуску востребованной продукции в объеме x , чтобы можно было своевременно воспользоваться этой готовностью и получить финансовую выгоду. При выбранном математическом описании это

¹ Земляков С. Д., Рутковский В. Ю. Функциональная управляемость и настраиваемость систем координатно-параметрического управления // Автоматика и телемеханика. 1986. Вып. 2. С. 21–30.

² Глумов В. М., Земляков С. Д., Рутковский В. Ю. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами: некоторые результаты и направления развития // Автоматика и телемеханика. 1999. Вып. 6. С. 100–116.

³ Пищухин А. М., Ахмедьянова Г. Ф. Оптимальное управление экономической безопасностью региона // Фундаментальные исследования. 2020. № 12. С. 180–185.

означает, что необходимо стремиться к минимуму различия плотностей вероятностей¹, подчиняющихся уравнениям (3) и (4). Подход, связанный с мониторингом за рынком, является обычным для реализуемых на практике стратегий управления предприятием.

Для решения поставленной задачи оптимального управления применим прием подобный идее профессора А.М. Летова^{2,3}. В соответствии с ней в функционал включим сумму квадрата потерь от недостаточности управления в виде разности плотностей вероятностей, введенных выше, и квадрата затрат на управление. В данном случае происходит управление системой с распределенными параметрами^{4,5,6}

$$F = \int_0^{t_f} \int_0^\infty (q(\omega_1^* - \omega)^2 + (b_1 - yb)^2) dx dt \rightarrow \min, \quad (6)$$

где q – постоянный коэффициент, t_f – время окончания управления.

Составим лагранжиан

$$L = q(\omega_1^* - \omega)^2 + (b_1 - yb)^2 + \psi(b y \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega}{\partial t}) \rightarrow \min. \quad (7)$$

Уравнения Эйлера и Остроградского-Пуассона⁷ для оптимального управления будут следующими

¹ Азанов В. М. Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // Автоматика и телемеханика. 2014. № 10. С. 39–51.

² Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, вып. 4. С. 436–441; Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. II // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, вып. 5. С. 561–568; Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. III // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, вып. 6. С. 661–665; Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, вып. 4. С. 425–435.

³ Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы. Москва: Высшая школа 1989. 263 с.

⁴ Габасов Р., Кириллова Ф. М., Кузьменков Д. С. Оптимальное управление в реальном времени специальной системой с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 12. С. 1839–1850.

⁵ Костецкий Г. И., Кузьменков Д. С. Оптимальное управление системой с распределенными параметрами // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы XXI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов (г. Гомель, 19–21 марта 2018 г.) / под редакцией О. М. Демиденко. Гомель: Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, 2018. С. 15.

⁶ Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2021. Vol. 17, iss. 4. P. 433–448.

⁷ Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \omega} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} \right) = -2q(\omega_1^* - \omega) + \dot{\psi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \omega} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega'_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega''_x} \right) = -2q(\omega_1^* - \omega) + by \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + b\psi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = by \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = -2(b_1 - yb) + \psi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Выражая $\dot{\psi}$ из первого уравнения и подставляя во второе, а также преобразуя третье и четвертое уравнения, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 2q(\omega_1^* - \omega) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = by \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + b\psi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = by \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ y = \frac{b_1}{b} - \frac{1}{2b} \psi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Заменяя y в двух средних уравнениях системы, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(b_1 - \frac{1}{2} \psi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \psi \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 \end{cases} \quad (10)$$

Производя дифференцирование и раскрывая скобки в первом уравнении, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \psi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} \psi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \psi \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \right). \quad (11)$$

Группируя одинаковые слагаемые, вернемся к системе двух нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 2\Psi \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{2} \Psi^2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \Psi \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 \end{cases} \quad (12)$$

Применим для решения этой системы метод малого параметра, для чего разложим переменные

$$\begin{cases} \Psi = \Psi_0 + \lambda \Psi_1 + \lambda^2 \Psi_2 + \dots \\ \omega = \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu^2 \omega_2 + \dots \end{cases} \quad (13)$$

Подставляем это разложение в (12), переносим линейное первое слагаемое в левую часть, а остальные, предварительно умноженные на λ и μ , в правую часть уравнений. Собирая все слагаемые с одинаковой степенью λ и μ , получим первые две системы уравнений приближения

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial \omega_0}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = 0 \end{cases}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = -\Psi_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} - 2\Psi_0 \frac{\partial^3 \omega_0}{\partial x^3} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} - \frac{1}{2} \Psi_0^2 \frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \Psi_0 \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \right)^2 \end{cases} \quad (15)$$

Первую систему уравнений (14) решаем методом разделением переменных

$$\Psi_0 = p(x) \cdot v(t). \quad (16)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (14) и разделяя переменные, имеем

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} = b_1 \frac{1}{p} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = M. \quad (17)$$

Получаем систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - Mv = 0 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{M}{b_1} p = 0 \end{cases}. \quad (18)$$

Решение находим в справочнике¹

$$\begin{cases} v = C_1 \exp(Mt) \\ p = C_1 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right). \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя полученное решение в (15), получим

$$\psi_0 = C_1 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right). \quad (20)$$

Аналогично решается второе уравнение системы (14):

$$\omega_0 = C_2 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right). \quad (21)$$

Подставляем теперь полученные решения в первое уравнение системы второго приближения (15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = & -C_1^2 C_2 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \left(\frac{M}{b_1}\right)^2 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - \\ & - \left(C_1 \sqrt{\frac{M}{b_1}} \exp(Mt) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)\right)^2 C_2 \frac{M}{b_1} \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - 2C_1^2 C_2 \exp(Mt) \times \\ & \times \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \left(\frac{M}{b_1}\right)^2 \exp(Mt) \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \exp(Mt) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - \\ & - \frac{1}{2} \left(C_1 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)\right)^2 C_2 \left(\frac{M}{b_1}\right)^2 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Выделяя общие сомножители, возвращаемся к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = -C_1^2 C_2 \left(\frac{M}{b_1}\right)^2 \exp^3(Mt) \left[\frac{9}{2} \operatorname{sh}^3\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + 3 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)\right] \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} C_1 C_2^2 \left(\frac{M}{b_1}\right)^2 \exp^3(Mt) \operatorname{sh}^3\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \end{cases} \quad (23)$$

Общее решение этих уравнений складывается из решения соответствующих однородных (20, 21) и частных решений, которые ищутся в виде правой части.

¹ Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука. 1976. 576 с.

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + \exp(3Mt) \left[A \operatorname{sh}^3\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + B \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \right] \\ \omega_1 = C_2 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + \exp(3Mt) \left[D \operatorname{sh}^3\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + F \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \right] \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{где } A = \frac{1}{2(b_1 - 1)}, B = \frac{1}{(b_1 - 1)^2}, D = \frac{1}{3(M - 2b_1)}, F = \frac{2b_1}{(3M - b_1)(M - 2b_1)}.$$

Результаты и их обсуждение

Теперь можно найти зависимость управляющих воздействий от времени и спроса для второго приближения.

$$\begin{aligned} y = \frac{b_1}{b} - \frac{1}{2b} & \left\{ C_1 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + \exp(3Mt) \left[A \operatorname{sh}^3\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + B \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \right] \right\} \\ & \left\{ C_2 \exp(Mt) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - \exp(3Mt) \left[D \operatorname{sh}^3\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + F \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Графики полученного решения представлены на рис. 1 и 2.

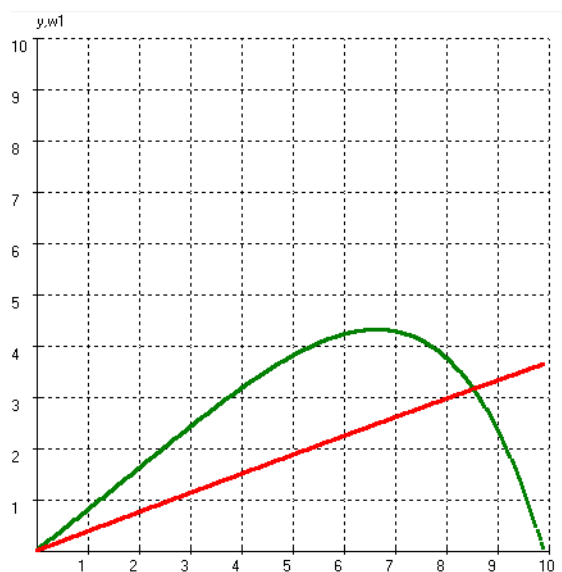
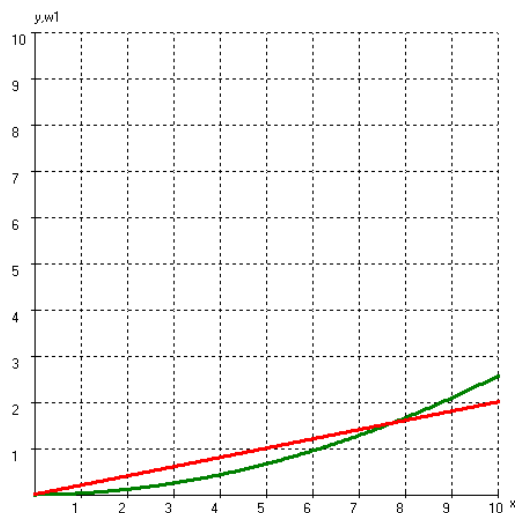


Рис. 1. Графики поведения решений по координате t

Рис. 2. Графики поведения решений по координате x

Верхние графики (зеленый цвет) отражают изменения управляющих воздействий, нижние – функции, связанной с плотностью вероятности. Для получения представления непосредственно о плотности вероятности необходимо умножить результат на экспоненту согласно формулам (2).

Выводы

Таким образом, оптимальное управление производственной системой на основе вероятностного критерия требует выпуклого распределения интенсивности приложения управляющих воздействий во времени и экспоненциального нарастания этой интенсивности в зависимости от возрастания потребности. При этом сделанные выводы относятся именно к параметрическому управлению, что означает направление управляющих воздействий на поддержание оптимальной величины параметров во время функционирования производственной системы. Основные управляющие воздействия, как и в классическом случае, направляются на поддержание оптимального поведения фазовых координат.

Список источников

Азанов В. М. Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // Автоматика и телемеханика. 2014. № 10. С. 39–51.

Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы. Москва: Высшая школа, 1989. 263 с.

Габасов Р., Кириллова Ф. М., Кузьменков Д. С. Оптимальное управление в реальном времени специальной системой с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 12. С. 1839–1850.

Глумов В. М., Земляков С. Д., Рутковский В. Ю. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами: некоторые результаты и направления развития // Автоматика и телемеханика. 1999. Вып. 6. С. 100–116.

Земляков С. Д., Рутковский В. Ю. Функциональная управляемость и настраиваемость систем координатно-параметрического управления // Автоматика и телемеханика. 1986. Вып. 2. С. 21–30.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1976. 576 с.

Костецкий Г. И., Кузьменков Д. С. Оптимальное управление системой с распределенными параметрами // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы XXI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов (г. Гомель, 19–21 марта 2018 г.) / под редакцией О. М. Демиденко. Гомель: Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, 2018. С. 15.

Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, вып. 4. С. 436–441.

Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. II // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, вып. 5. С. 561–568.

Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. III // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, вып. 6. С. 661–665.

Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, вып. 4. С. 425–435.

Пищухин А. М., Ахмедьянова Г. Ф. Оптимальное управление экономической безопасностью региона // Фундаментальные исследования. 2020. № 12. С. 180–185.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, 1977. Москва: Наука, 1977. 736 с.

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.

Pishchukhin A. M., Akhmedyanova G. F. Optimal organization of multi-profile production // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1333, № 7. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1333/7/072020/pdf> (дата обращения: 06.06.2022).

Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2021. Vol. 17, iss. 4. P. 433–448.

References

Azanov V. M. Optimal'noe upravlenie lineinoi diskretnoi sistemoi po kriteriiu veroiatnosti [Optimal control for linear discrete systems with respect to probabilistic criteria]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2014, no. 10, pp. 39–51.

Aleksandrov A. G. *Optimal'nye i adaptivnye sistemy* [Optimal and adaptive systems]. Moscow: Vysshaya shkola 1989. 263 p.

Gabasov R., Kirillova F. M., Kuz'menkov D. S. Optimal'noe upravlenie v real'nom vremeni spetsial'noi sistemoi s rasprelennymi parametrami [Real-time optimal control of a special system with distributed parameters]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2014, vol. 54, no. 12, pp. 1839–1850.

Glumov V. M., Zemliakov S. D., Rutkovskii V. Iu. Adaptivnoe koordinatno-parametricheskoe upravlenie nestatsionarnymi ob'ektami: nekotorye rezul'taty i napravleniia razvitiia [Adaptive coor-

dinate-parametric control of non-stationary objects: some results and directions of development]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 1999, iss. 6, pp. 100–116.

Zemliakov S. D., Rutkovskii V. Iu. Funktsional'naiia upravliaemost' i nastraivaemost' sistem koordinatno-parametricheskogo upravleniia [Functional controllability and customizability of coordinate-parametric control systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 1986, iss. 2, pp. 21–30.

Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow: Nauka. 1976. 576 p.

Kostetskii G. I., Kuz'menkov D. S. Optimal'noe upravlenie sistemoi s raspredelennymi parametrami [Optimal management of a system with distributed parameters]. *Novye matematicheskie metody i komp'iuternye tekhnologii v proektirovanii, proizvodstve i nauchnykh issledovaniakh: materialy XXI Respublikanskoi nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov (g. Gornel', 19–21 marta 2018 g.)* [New mathematical methods and computer technologies in engineering, production and scientific research: Proceedings of the XXI Republican Scientific Conference of Students and Postgraduate Students (Gornel', March 19–21, 2018); ed. by O. M. Demidenko]. Gornel': Gornel'skii gosudarstvennyi universitet imeni Frantsiska Skoriny, 2018, pp. 15.

Letov A. M. Analiticheskoe konstruirovaniie reguliatorov. I [Analytical design of regulators I]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 1960, vol. 21, iss. 4, pp. 436–441.

Letov A. M. Analiticheskoe konstruirovaniie reguliatorov. II [Analytical design of regulators. II]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 1960, vol. 21, iss. 5, pp. 561–568.

Letov A. M. Analiticheskoe konstruirovaniie reguliatorov. III [Analytical design of regulators. III]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 1960, vol. 21, iss. 6, pp. 661–665.

Letov A. M. Analiticheskoe konstruirovaniie reguliatorov. IV [Analytical design of regulators. IV]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 1961, vol. 22, iss. 4, pp. 425–435.

Pishchukhin A. M., Akhmed'ianova G. F. Optimal'noe upravlenie ekonomicheskoi bezopasnost'iu regiona [Optimal management of economic security of the region]. *Fundamental'nye issledovaniia* [Fundamental research], 2020, no. 12, pp. 180–185.

Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics], 1977. Moscow: Nauka, 1977. 736 p.

El'sgol'ts L. E. *Differentsial'nye uravneniia i variatsionnoe ischislenie* [Differential Equations and Variational Calculus]. Moscow: Nauka, 1969. 424 p.

Pishchukhin A. M., Akhmedyanova G. F. Optimal organization of multi-profile production. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1333, no. 7. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1333/7/072020/pdf> (accessed: 06.06.2022).

Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, Vol. 17, iss. 4, pp. 433–448.

Сведения об авторах

Гульнара Фазульевна Ахмедьянова – кандидат педагогических наук, доцент; <https://orcid.org/0000-0003-3284-7794>, ahmedyanova@bk.ru, Оренбургский государственный университет (д. 13, пр-т Победы, 460018 г. Оренбург, Россия); **Gulnara F. Akhmedyanova** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor; <https://orcid.org/0000-0003-3284-7794>, ahmedyanova@bk.ru, Orenburg State University (13, pr. Pobody, 460018 Orenburg, Russia).

Александр Михайлович Пищухин – доктор технических наук, профессор; <https://orcid.org/0000-0003-4655-6824>, pishchukhin@mail.ru, Оренбургский государственный университет (д. 13, пр-т Победы, 460018 г. Оренбург, Россия); **Aleksandr M. Pishchukhin** –

Doctor of Technical Sciences, Professor; <https://orcid.org/0000-0003-4655-6824>,
pischuchin@mail.ru, Orenburg State University (13, pr. Pobedy, 460018 Orenburg, Russia).

Заявленный вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 25.07.2022; одобрена после рецензирования 29.08.2022; принята к публикации 05.09.2022.

The article was submitted 25.07.2022; Approved after reviewing 29.08.2022; Accepted for publication 05.09.2022.