

Литература

1. Буренин, С.В. Исследование применения нечетких регуляторов в системах управления технологическими процессами / С.В. Буренин, М.С. Куленко // Вестник ИГЭУ. – 2010. – № 2. – С. 72 – 76.
2. Вересова, О.В. Исследование модели электропривода коксотушильного электровоза с нечетким регулятором положения / О.В. Вересова // Современная техника и технологии. – 2014. – № 1 (29). – URL: <http://technology.snauka.ru/2014/01/2998>

3. Ланграф, С.В. Динамика электропривода с нечетким регулятором / [С.В. Ланграф и др.] // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – № 4. – С. 168 – 173.

4. Терехов, В.М. Системы управления электроприводов / В.М. Терехов, О.И. Осипов; под ред. В.М. Терехова. – М., 2006.

5. Чернецкая, И.А. Нечеткие регуляторы в системах автоматического регулирования / И.А. Чернецкая, В.О. Чернецкий // Вестник ЮУрГУ. – 2006. – № 14. – С. 156 – 159.

УДК 531/534: [57+61]

О.Ю. Долганова

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор Ю.И. Няшин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА БИОЛОГИЧЕСКОГО ТЕЛА

В статье представлен анализ публикаций, в которых предложены различные модели биологического роста живых тканей. Предложена новая формулировка механической модели роста, исключающая возникновение остаточных напряжений в процессе роста. Представлена дифференциальная постановка задачи ростового деформирования и ее решение средствами ANSYS. Представлены результаты численного эксперимента для решения прикладной медицинской проблемы.

Биологический рост, ростовая деформация, накопление ростовой деформации, механическая модель роста, собственная деформация.

The article presents the analysis of the publications where different models of biological growth of living tissues are proposed. The new formulation of the mechanical model of growth, excluding the occurrence of residual stresses in the process of growth is proposed. The differential formulation of the problem of the growth deformation and its solution with the help of ANSYS is proposed. The results of the numerical experiment for the solution of applied medical problem are presented.

Biological growth, growth deformation, accumulation of growth deformation, mechanical model of growth, inherent deformation.

Введение

В настоящее время биология и медицина становятся одними из самых привлекательных областей применения математики. Поскольку решение проблем, связанных с прогнозированием протекания постлечебного периода, оценка эффективности ортопедических аппаратов и искусственных заменителей путем экспериментального исследования затруднительны, то наиболее эффективным аппаратом их исследования представляется математическое моделирование. В детской ортопедии, связанной с исправлением врожденных патологий развития тканевых структур в растущем теле ребенка, первостепенными являются вопросы моделирования и управления ростом. Дело в том, что ортопедическое лечение основано на механическом воздействии ортопедических устройств на недоразвитые участки тела, подлежащие коррекции: растягивающие усилия, создаваемые ортопедическим аппаратом, стимулируют рост в направлении действия нагрузки. Вследствие данного воздействия в ткани возникает адаптивный рост, чем достигается скорейшее исправление дефекта.

Методики ортопедического лечения основаны исключительно на опыте врачей и их субъективных представлениях о ростовых процессах в костной ткани – не существует научно-обоснованных стандартов

лечения, которые определяли бы для каждого пациента индивидуально величину и способ дозирования нагрузки, создаваемой ортопедическим аппаратом. Таким образом, исследование, направленное на разработку методики моделирования и управления ростом ткани, представляет актуальность. В рамках данной статьи отражены вопросы моделирования роста в костной ткани. Вопросам управления ростом посвящены другие статьи автора [2], [3].

Решение конкретных биологических задач, связанных с моделированием ростовых процессов затруднительно ввиду сложности определения параметров роста. На сегодняшний день значения параметров роста определены в исследовании Масич А.Г. [4] для материала разобранных фрагментов твердого нёба детей с врожденным заболеванием «волчья пасть». В данной статье представлена математическая модель ростового деформирования несращенного костного нёба ребенка во время ортопедического лечения, осуществляемого в возрасте до трех лет.

Обзор математических моделей роста

Рост является общебиологическим свойством живой материи и входит в число основных составляющих биологического развития наряду с формообразованием (морфогенезом) и возникновением новых

типов клеток (дифференцировкой). Точного биологического определения роста нет, но говорят о необратимом изменении массы и размеров [4], [6], [7], [8]. Явления, понимаемые как рост живой ткани, разнообразны и могут отличаться в зависимости от принятой модели роста и уровня организации, на котором рассматривается предмет исследования. Из обзора существующих моделей можно выделить основополагающие направления, в рамках которых разработаны те или иные модели объемно-растущей ткани:

- модели, основанные на гипотезе о влиянии на рост ткани внутриклеточного давления как стимулирующего фактора [8];
- модели многофазных сред, так называемые «*mixture theory*», в которых растущая среда представлена как многофазная дисперсная система, рост которой обусловлен транспортом жидкости из одной фазы в другую [4], [6];
- модели, основанные на гипотезе о влиянии остаточных напряжений на рост ткани как стимулирующего фактора [10], [12];
- модели, связывающие зависимость скорости роста от механических напряжений, возникающих в теле вследствие приложения к нему механических сил и «биолого-механических» свойств ткани [4], [7], [11].

Таким образом, можно выделить факторы, влияющие на рост живой ткани. Таковыми являются: химический состав, концентрация и транспорт жидкости между фазами системы, биологические ростовые свойства и напряжения в материале тела. С точки зрения вычисления параметров определяющих соотношений, моделирования и управления ростом, механическая модель роста представляет наибольшую практическую значимость.

В рамках механической модели для описания свойств материала вводится понятие «растущего континуума» [4], [7], т.е. материала, который допускает наряду с традиционными в механике типами деформаций (упругой или неупругой) еще ростовую деформацию. Под ростовой деформацией подразумевается неупругое изменение объема (формы) тела, обусловленное делением и увеличением количества клеток, из которых состоит тело, и равномерным их перераспределением по всему объему тела.

По-видимому, первая континуальная динамическая модель растущего материала была предложена Ф.Н. Нсу в его работе «Влияние механических сил на форму растущего упругого тела» [7]. В ходе экспериментов, проводимых Ф.Н. Нсу на тканях растений и животных, была установлена зависимость скорости роста тела, т.е. скорости изменения его формы от прикладываемых к телу объемных и поверхностных сил. Данная биолого-механическая зависимость в дальнейшем была выражена А.А. Штейном дифференциально определяющими соотношениями роста ткани [11].

В рамках механической модели выражение для скорости ростовой деформации имеет вид:

$$\xi^g = A + B \cdot \sigma, \quad (1)$$

где A – тензор врожденного (собственного) роста, B – тензор, отражающий влияние напряжений на деформацию роста, σ – тензор макронапряжений.

Следует отметить, что ростовая деформация ϵ^g может быть рассмотрена как один из видов собственной деформации [9]. Тогда полная деформация системы будет равна сумме упругой ϵ^e и ростовой деформаций ($\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^g$). Появление ростовой деформации в системе, вообще говоря, может изменить напряжения в системе. Напряжения, создаваемые собственной деформацией при отсутствии внешних сил, называют собственными напряжениями. Если тело свободно от опор, то собственные напряжения будут самоуравновешены, и тогда их называют остаточными напряжениями.

В работе А.Г. Масич [4], исследование которой посвящено вычислению параметров определяющего соотношения (1), принято предположение об изотропии материала и роста, что позволило заменить тензоры на скалярные величины, которые в ее исследовании были определены. Однако данное определяющее соотношение не исключает возникновения собственных напряжений в ткани в процессе роста. В данной статье представлена новая формулировка определяющего соотношения (1) из которой следует, что собственная (ростовая) деформация не вызывает собственных напряжений в ткани. Условие отсутствия собственных напряжений является необходимым при разработке алгоритма управления ростовыми деформациями [2].

Поэтому, применяя гипотезу об изотропии материала и закон Гука, определяющее соотношение для ξ^g может быть записано в виде (2):

$$\xi^g = A\mathbf{I} + M\epsilon^e, \quad (2)$$

$$M = B / E, \quad (3)$$

где A , M – константы, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, E – модуль упругости материала.

Далее показано, что ростовая деформация, соответствующая формуле (2), не вызывает собственных напряжений в ткани и может быть найдена как:

$$\epsilon^g = \xi^g dt = A\mathbf{I}dt + M\epsilon^e dt. \quad (4)$$

Действительно, слагаемое $A\mathbf{I}dt$ аналогично равномерному температурному нагреву, который не вызывает напряжений в теле при определенных граничных условиях. Что касается слагаемого $M\epsilon^e dt$, то в данном случае применима теорема о собственной деформации, вызванной механическими силами в линейно-упругом теле, и потому свободной от напряжений. Тогда, если внешние силы не меняются, то скорость ростовых деформаций не изменится. В

таком случае интегрирование на каждом временном шаге можно заменить произведением на время и записать определяющее соотношение для ростовой деформации в виде (5), где T – время.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^g = AIT + MT\boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (5)$$

Постановка задачи ростового деформирования.

Рассмотрим область V с границей S . Замыкание $\bar{V} = V \cup S$, $S = S_u \cup S_\sigma \cup S_p$ принадлежит трехмерному евклидову пространству E^3 , т.е. $\bar{V} \in E^3$. На границе S_u в каждой точке заданы три компоненты вектора перемещений. На границе S_σ в каждой точке заданы три компоненты вектора напряжений. На границе S_p в каждой точке заданы три компоненты вектора сил. Геометрические размеры области можно оценить по координатам точек, приведенным на рис. 1.

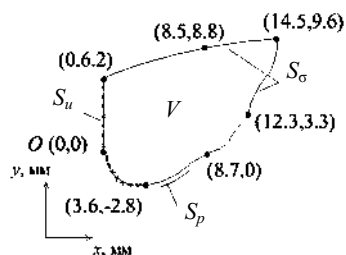


Рис. 1. Расчетная область

Тогда постановка начально-краевой задачи определения ростовых деформаций в упругой области примет следующий вид:

1) уравнение статического равновесия имеет место внутри области

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}, \quad (6)$$

2) деформации достаточно малы и аддитивны

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^g, \quad (7)$$

3) упругая деформация связана с напряжениями законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}, \quad (8)$$

4) определяющее соотношение

$$\boldsymbol{\varepsilon}^g = AIT + MT\boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}, \quad (9)$$

5) соотношение деформация – перемещение записывается в рамках геометрически линеаризованной теории

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}), \quad \mathbf{r} \in \bar{V}, \quad (10)$$

6) граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_\sigma, \quad (11)$$

$$u_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \mathbf{r} \in S_u, \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad (x = y = 0).$$

В итоге система уравнений (6) – (12) есть система дифференциальных уравнений начально-краевой задачи определения ростовой деформации в упругой системе.

Решение задачи ростового деформирования

На сегодняшний день наиболее адекватными представляются математические модели исследуемых биологических систем, реализованные в конечно-элементных программных комплексах. Основной сложностью моделирования в рамках любого вычислительного программного комплекса является ограниченное количество моделей деформирования. Поскольку в ANSYS, как и в любом другом конечно-элементном пакете, нет встроенного инструмента моделирования роста, для вычисления накопленной ростовой деформации реализовывалась следующая последовательность действий: сначала решалась задача (6 – 9) в начальный момент времени ($T = 0$) и вычислялись упругие деформации. Далее во внешнем алгоритме, реализованном на C++, вычислялись ростовые деформации по формуле (9). Затем формировалось начальное деформированное состояние согласно найденной ростовой деформации, и сетка расчетной области деформировалась в новое положение. Описанная процедура была опробована при решении тестовых задач, в которых получено изменение формы тела и показано отсутствие напряжений.

Численный эксперимент

Важной проблемой восстановительной медицины является реабилитация пациентов с врожденной расщелиной нёба. Данный порок влечет за собой множество функциональных нарушений и устраняется только хирургическим способом в раннем возрасте. Классические методики лечения позволяют восстановить целостность структур челюстно-лицевой области, однако до 70 % ранее оперированных нуждаются в сложных повторных операциях, что значительно затягивает их социальную и медицинскую реабилитацию [1]. Ортопедическое лечение, проводимое пациентам раннего возраста в ходе курса реабилитации, нацелено на сближение разобщенных фрагментов нёба до хирургического вмешательства. Чем оно успешнее, тем ближе будут низведены разобщенные фрагменты нёба, и тем безопаснее будет операция по их сшиванию.

Современная ортопедическая аппаратура делится на два типа: пассивная и активная. Пассивные ортопедические аппараты фиксируются в ротовой полости на клей и защищают разобщенное нёбо от воздейст-

вия языка, создавая тем самым, благоприятные условия для роста и развития нёбных отростков (рис. 2). Активные аппараты фиксируются внутрикостно на винты и создают дополнительные механические усилия, приводящие к сближению нёбных отростков (рис. 3). Поскольку дети с врожденной патологией нёба находятся на диспансерном учете вплоть до совершеннолетия, данные о развитии их зубочелюстной системы фиксируются на диагностических моделях – гипсовых слепках. Для реализации численного эксперимента слепок нёба полугодовалого пациента был отсканирован, преобразован в Cad-модель и отредактирован в графическом модуле программного комплекса SolidWorks. Редактирование производилось с целью выделения нужных тел (нёбных костей) из всего слепка.

В численном эксперименте, проведенном для расчетных областей, показанных на рис. 2 и 3, вычислялось накопление ростовой деформации в нёбе в течение 10 месяцев при действии пассивного ортопедического аппарата (схема 1) и одного месяца при действии активного (схема 2). Заданные нагрузки обозначены буквами *A*, *B*, *C*.

Уменьшение диастаза между разобщенными нёбными фрагментами в результате накопления ростовой деформации составило соответственно 8,8 и 11 мм. Полученные результаты находятся в удовлетворительном соответствии с опубликованными экспериментальными данными, что позволяет произвести верификацию модели.

Заключение

Из анализа литературных данных можно выделить факторы, влияющие на рост: химический состав, концентрация, транспорт и напряжения в материале тела. Механические напряжения, возникающие в теле при приложении к нему внешних механических сил, являются существенным фактором, оказывающим влияние на рост. Из определяющего соотношения, сформулированного автором, следует, что ростовая деформация не вызывает остаточных напряжений в ткани. Тогда, с точки зрения механики, становится возможным моделирование и управление ростом.

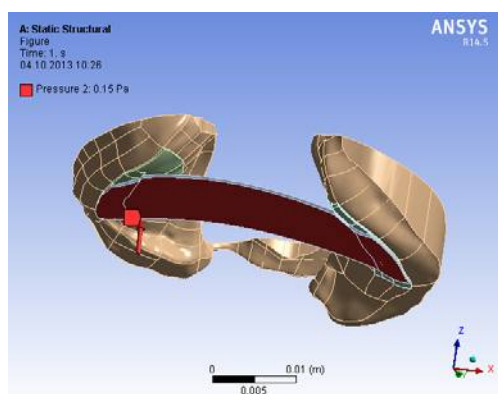


Рис. 2. Моделирование пассивного ортопедического аппарата. Схема 1

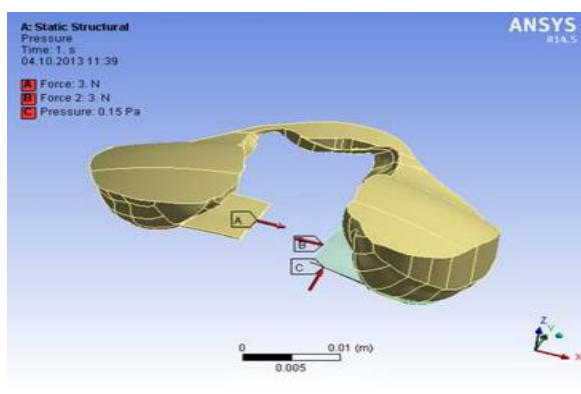


Рис. 3. Моделирование активного ортопедического аппарата. Схема 2

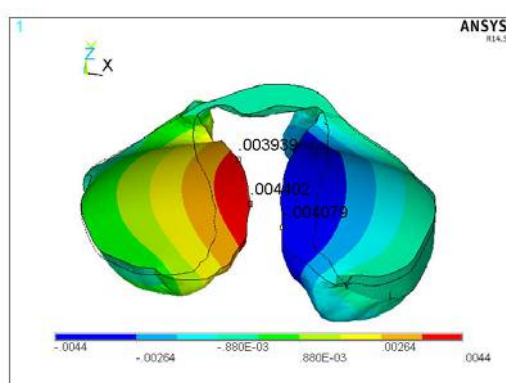


Рис. 4. Перемещения в направлении оси *x*. Схема 1

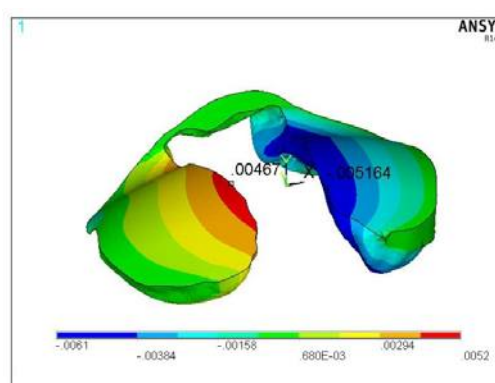


Рис. 5. Перемещения в направлении оси *x*. Схема 2

Литература

1. Берсенева, С.В. Оптимизация выбора методов зубочелюстного протезирования взрослых пациентов в отдаленные сроки после хирургического лечения при врожденной расщелине верхней губы, альвеолярного отростка и нёба: автореф. дис. канд. мед. наук / С.В. Берсенева. – М., 2010.
2. Лохов, В.А. Алгоритм поиска оптимальных усилий для лечения двусторонней расщелины твердого нёба / В.А. Лохов, О.Ю. Долганова // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16. – № 3 (57). – С. 42 – 56.
3. Лохов, В.А. Биомеханическое обоснование выбора конструкции ортопедического аппарата для лечения врожденной расщелины твердого нёба / В.А. Лохов, О.Ю. Долганова // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16. – № 4 (56).
4. Масич, А.Г. Математическое моделирование ортопедического лечения врожденной расщелины твердого нёба у детей: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.Г. Масич. – Пермь, 2000.
5. Штейн, А.А. Математическая модель растущей растительной ткани как трехфазной деформируемой среды

/ А.А. Штейн, Е.Н. Юдина // Российский журнал биомеханики – 2011. – Т. 15. – № 1 – С. 42 – 51.

6. Ambrosi, D. The theory of mixtures for growth and remodeling compression / D. Ambrosi, G. Vitale // Mini-Workshop: The mathematics of growth and remodelling of soft biological tissues. – 2008. – № 39. – P. 9 – 10.
7. Hsu, F. The influence of mechanical loads on the form of a growing elastic body / F. Hsu // University Microfilms, Inc., Ann Arbor. – Michigan. 1966.
8. Lockhart, J.A. An analysis of irreversible plant cell elongation / J.A. Lockhart // J. Theoretical Biology. – 1965. – V. 8. – № 2 – P. 264 – 275.
9. Mura, T. Micromechanics of Defects in Solids / T. Mura. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ, 1991.
10. Rodriguez, E.K. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues / E.K. Rodriguez, A. Hoger, A.D. McCulloch // Journal Biomech. – 1994. – V. 27. – № 4 – P. 455 – 467.
11. Stein, A.A. The deformation of a rod of growing biological material under longitudinal compression / A.A. Stein // Journal Applied Math and Mechanics. – 1995. – V. 59, № 1 – P. 139–1.
12. Taber, L.A. Theoretical Study of Stress-Modulated Growth in the Aorta / L.A. Taber, D.W. Eggers // Journal of Theoretical Biology. – 1996. – V. 180. – P. 343 – 357.

УДК 536.244:533.601

А.А. Загоскин, С.В. Карпов, Э.Н. Сабуров

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ АЭРОДИНАМИКИ ЦИКЛОННЫХ УСТРОЙСТВ

Статья посвящена анализу применимости различных моделей турбулентности, основанных на осредненных по времени уравнениях Навье-Стокса при численном моделировании сильно закрученных потоков. Выполнено сопоставление расчетных и экспериментальных данных, полученных для циклонного устройства с внешней саморециркуляцией газов и показана возможность изучения его аэродинамики численным моделированием.

Циклонная камера, численное моделирование, аэродинамика.

The paper is devoted to the analysis of application of various RANS turbulence models based on Navier-Stokes equations averaged over time at the numerical simulation of strongly swirling flows. Results of mathematical modeling of cyclone devices with external gas recirculation were compared with experimental data. The results showed that cyclone device aerodynamics could be investigated by numerical simulations.

Cyclone device, numerical simulations, aerodynamics.

Обозначения:

$v_{вх}$ – средняя скорость потока во входных каналах;
 $w_\phi = w_\phi / v_{вх}$ – безразмерная тангенциальная компонента полной скорости потока;
 $\bar{w}_{\phi m} = w_{\phi m} / v_{вх}$ – безразмерная максимальная тангенциальная скорость;
 $r_{\phi m}$ – радиус положения максимума тангенциальной скорости;
 $d_{вых}$ – диаметр выходного отверстия циклонной камеры;
 $f_{вх}$ – площадь входа циклонной камеры;
 $Q_{вх}$ – объемный расход газа через циклонную камеру;
 $Q_{рец}$ – объемный расход рециркулируемого газа;

$k_c = Q_{рец} / Q_{вх}$ – коэффициент саморециркуляции;
 p_c – избыточное статическое давление;
 $p_{с.к}$ – избыточное статическое давление на боковой поверхности камеры;
 ΔP_Π – перепад полного давления в циклонной камере;
 $\zeta_{вх} = 2\Delta P_\Pi / (\rho v_{вх}^2)$ – коэффициент аэродинамического сопротивления циклонной камеры.

Для численного моделирования аэродинамики циклонных устройств первостепенное значение имеет обоснованный выбор модели турбулентности и методов дискретизации дифференциальных уравнений. В работе [1] показано, что неправильный выбор численных схем для дискретизации уравнений